Topologia
Lista 2 (przestrzenie metryczne, zbieżność)

Zad 1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest metryką na $\mathbb{R}$, gdzie

$$a)\ d(x,y) = |x| + |y|, \qquad b)\ d(x,y) = |x| \cdot |y|, \qquad c)\ d(x,y) = |x-y|^2.$$

Zad 2. Dla jakich odwzorowań $f : X \to \mathbb{R}$ funkcja $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dana wzorem $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ jest metryka w X?

Zad 3. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, $m,n \in \mathbb{N}$, jest metryką w $\mathbb{N}$. Jeśli tak, to jak wyglądają kule $B(1,1)$, $B(1,\frac{1}{2})$ oraz $B(3,\frac{1}{2})$ w tej metryce.

Zad 4. Pokazać, że jeśli (X,d) jest przestrzenią metryczną, to metrykami są również funkcje

$$d_1(x,y) = a \cdot d(x,y),\ a > 0, \qquad d_2(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}, \qquad d_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Pokazać, że metryki te wprowadzają na X tą samą rodzinę zbiorów otwartych, co wyjściowa metryka d.

Zad 5. Uzasadnić, że następujące funkcje na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ są metrykami:

$$d_e(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \qquad (\textit{metryka euklidesowa}),$$

$$d_t(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \qquad (\textit{metryka taksówkowa}),$$

$$d_m(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \qquad (\textit{metryka maximum}),$$

$$d_w(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|} + \sqrt{|x_2-y_2|} \qquad (\textit{metryka „wklęsła”}),$$

gdzie $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$. Wyznaczyć postać kul otwartych dla tych metryk oraz pokazać, że wprowadzają one na $\mathbb{R}^2$ tę samą rodzinę zbiorów otwartych.

Zad 6. Uzasadnić, że następujące funkcje są metrykami na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Są to odpowiednio tzw. *metryka studni* oraz *metryka rzeki*:

$$d_s(x,y) = \begin{cases} d_e(x,y), & \text{gdy } x,y \text{ leżą na tej samej prostej} \\ & \text{przechodzącej przez punkt } (0,0), \\ d_e(x,(0,0)) + d_e(y,(0,0)), & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

$$d_r(x,y) = \begin{cases} |x_2-y_2|, & \text{gdy } x_1 = y_1 \\ |x_1-y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ oraz d_e jest metryką euklidesową. Wyznaczyć postać kul otwartych oraz podać interpretacje „topologiczne” dla tych metryk.

Zad 7. Niech d_e będzie metryką euklidesową, a d_d metryką dyskretną na prostej $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja

$$d_{e\times d}\big((x,y)(u,v)\big) = d_e(x,u) + d_d(y,v)$$

jest metryką na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ oraz wyznaczyć postać kul w tej metryce.

Zad 8. Scharakteryzować zbieżność ciągu w przestrzeni z metryką dyskretną.

Zad 9. Zbadać zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ we wszystkich metrykach z zadań 5, 6, 7 i 8, gdzie

	a_n		a_n		a_n		a_n
a)	$(1, 2 - \frac{1}{n})$	c)	$(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{3}{n^2})$	e)	$(\frac{1-2n}{n}, \pi)$	g)	$(\frac{2n+1}{n}, \frac{2n+1}{n})$
b)	$(-1, -1)$	d)	$(3 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{2n})$	f)	$(-2, \frac{(1+n)^2}{n^2+2n+1})$	h)	$((1 + \frac{1}{n})^n, 0)$

Zad 10. Pokazać, że przestrzeń $C[a, b]$ funkcji ciągłych na odcinku $[a, b]$ wraz z funkcją określoną wzorem

$$d(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

jest przestrzenią metryczną. Jak wyglądają kule w tej przestrzeni? Udowodnić, że zbieżność w tej metryce jest równoważna zbieżności jednostajnej.

Zad 11. Sprawdzić, czy ciąg funkcji x_n jest zbieżny do funkcji α w przestrzeni $C[a, b]$ z metryką supremum, gdy

N	$C[a, b]$	x_n	α
a)	$C[-3, 3]$	$\sqrt{t^2 + \frac{1}{n^3}}$	$\lvert t\rvert$
b)	$C[0, 8]$	$(\frac{t}{8})^n - (\frac{t}{8})^{2n} + t$	t
c)	$C[0, 1]$	$t^{2n} - t^{n+1} + t$	t
d)	$C[-4, 4]$	$\frac{1}{n^2}\sqrt{n^4 t^2 + 1}$	t
e)	$C[1, 2]$	$n^2(\sqrt{t + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{t})$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
f)	$C[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	$\frac{t^n - t}{1+t^n}$	1
g)	$C[0, 1]$	$\sqrt[n]{1 + t^n}$	t
h)	$C[0, \frac{1}{3}]$	$3^n t^n - 3^{n+1} t^{n+1} - 3t^n$	0
i)	$C[0, 2]$	$\sqrt[n]{1 + t^n}$	$\begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \\ t, & t \in [1, 2] \end{cases}$

Zad 12. Znaleźć granicę ciągu funkcji x_n, jeśli ona istnieje, w przestrzeni $C[a, b]$ z metryką supremum, gdy

N	$C[a, b]$	x_n
a)	$C[-1, 0]$	$\frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3 t + 1}$
b)	$C[1, 2]$	$\frac{2t^n - 1}{1+t^n}$
c)	$C[-1, \frac{1}{2}]$	$\frac{(t+1)^{2n} - t^2 n}{(t+2)^{2n}}$
d)	$C[1, 2]$	$n \sin(\frac{t^2}{n}) + \frac{t^3}{n}$
e)	$C[0, 9]$	$\frac{9^n t^n - t^{2n}}{9^{2n}}$
f)	$C[-1, 5]$	$\operatorname{arctg}(n(t^2 + 1))$
g)	$C[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$(\sin t)^{2n} + \sqrt[3]{\frac{t}{n}}$
h)	$C[1, 2]$	$\frac{t^2}{n^2} \ln(\frac{t}{n})$